

יסודות הפיזיקה 20125

פרק 21 - תנועה הרמונית - עם משוואות דיפרנציאליות

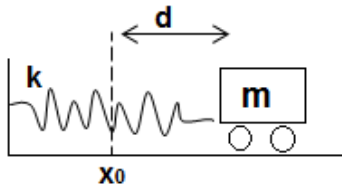
תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה 1
2. תרגילים מסכמים 4
3. תנועה הרמונית מרוסנת 7

תנועה הרמונית פשוטה:

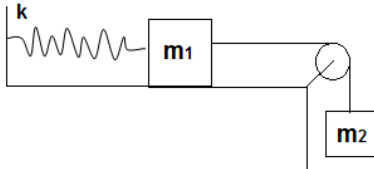
שאלות:

(1) מסה מתנגשת במסה



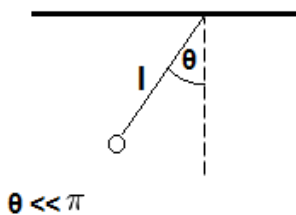
מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k . מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצא את $x(t)$ של המסה.

(2) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



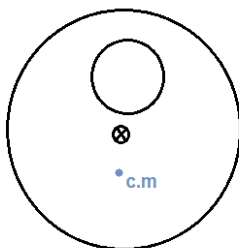
מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M .
 א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).
 ב. מצא את תדירות התנודה של המערכת.
 ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם מומנטים)



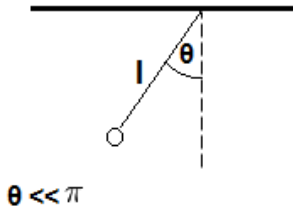
נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה. אורך החוט של המטוטלת הוא l . מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן. הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך מומנטים).

(4) דוגמה - דיסקה עם חור

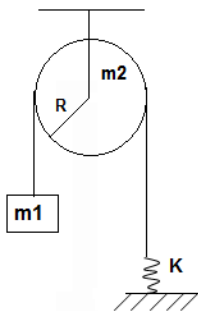


מצא את תדירות התנודות הקטנות של דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R אם ידוע כי במרחק R ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רבע R (הדיסקה מחוברת במסמר במרכזה אל הקיר).

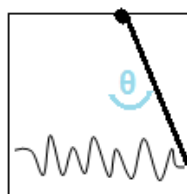
- (5) **דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)**
נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
אורך החוט של המטוטלת הוא l .
מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.
הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).



- (6) **גליל מחובר לקפיץ מתגלגל ללא החלקה**
גליל בעל מסה m ורדיוס R נמצא על משטח אופקי לא חלק ומחובר באמצעות קפיץ אל הקיר. קבוע הקפיץ הוא k והוא מחובר למרכז הגליל. הנח שתנועת הגליל אופקית בלבד ושהוא מתגלגל ללא החלקה על המשטח.
מצא את תדירות התנודות הקטנות.
פתור פעם אחת באמצעות אנרגיה ופעם נוספת באמצעות כוחות ומומנטים.



- (7) **גלגלת מסה וקפיץ**
במערכת הבאה, המסה m_1 קשורה בחוט דרך גלגלת אל קפיץ המחובר לקרקע. הגלגלת אינה אידאלית. נתון: R רדיוס הגלגלת, m_2 מסת הגלגלת, k קבוע הקפיץ. הנח כי החוט לא מחליק על הגלגלת.
א. מצא את נקודת שיווי המשקל.
ב. מצא את תדירות התנודה.
ג. מושכים את המסה אורך d מנקודת שיווי המשקל. מהו $d_{\max}$ המרחק המקסימלי שניתן למשוך את המסה מבלי שהמתיחות בחוט תתאפס במהלך התנועה?



- (8) **מוט תלוי מחובר עם קפיץ לקיר**
מוט בעל אורך L ומסה M (התפלגות אחידה) תלוי מהתקרה וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה. קצהו השני של המוט מחובר בקפיץ, בעל קבוע k לקיר. הקפיץ רפוי כאשר המוט נמצא מאונך לתקרה.
א. הראה כי תנועת המוט בזוויות קטנות היא תנועה הרמונית ומצא את תדירות התנועה.
ב. מצא את הזווית של המוט כפונקציה של הזמן אם המוט משוחרר ממנוחה בזווית נתונה θ_0 .

תשובות סופיות:

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\theta(t=0) = -\omega A \sin \varphi \quad (3)$$

$$-\left(\frac{16}{247} \frac{g}{R}\right)(\theta - 0) = \ddot{\theta} \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

$$E = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad \text{באמצעות אנרגיה:} \quad (6)$$

$$\sum F_x = -k(x - x_3) = m\ddot{x} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad \text{באמצעות כוחות ומומנטים:}$$

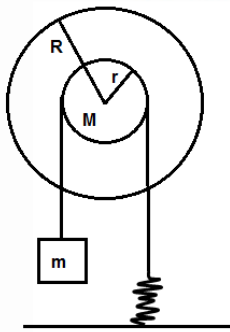
$$d_{\max} = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + \frac{1}{2}m_2}} \quad \text{ב.} \quad x_0 = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k^+}{m^+}}t\right) \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k^+}{m^+}} \quad \text{א.} \quad (8)$$

תרגילים מסכמים:

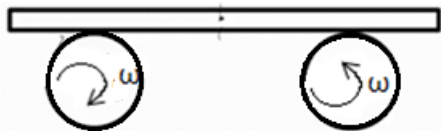
שאלות:

(1) דיסקה כפולה מסה וקפיץ



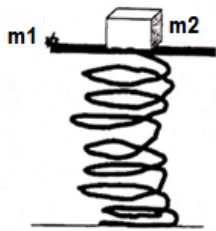
- נתונה דיסקה ממוסמרת במרכזה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
 הדיסקה בנויה משתי דיסקות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.
 סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט.
 עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.
 א. מצאו את תדירות התנודות.
 ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?

(2) מוט על שני גלגלים



- מוט בעל מסה M מונח על שני גלגלים המקובעים במרכזם.
 הגלגלים מסתובבים במהירות זוויתית ω כך שהגלגל הימני מסתובב נגד כיוון השעון והשמאלי עם כיוון השעון.
 בין המוט והגלגלים קיים חיכוך ומקדם החיכוך הקינטי נתון.
 מניחים את המוט כך שמרכזו נמצא במרחק A מהמרכז בין הגלגלים.
 מצא את תדירות התנודה של המוט.

(3) מסה על משטח על קפיץ אנכי

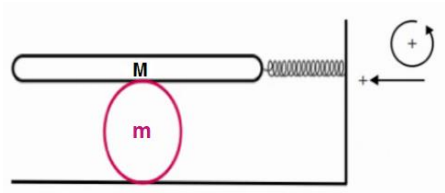


- על קפיץ שקבועו k מונח משטח שמסתו m_1 , המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ.
 על המשטח מונח גוף שמסתו m_2 .
 מכווצים את הקפיץ בשיעור Δy ומשחררים.
 א. מה צריך להיות $\Delta y_{\min}$ כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

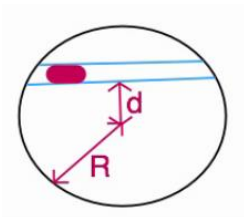
ב. הניחו: $\Delta y = 2\Delta y_{\min}$, $k = 10 \frac{Nr}{m}$, $m_1 = 0.04 \text{ kg}$, $m_2 = 0.06 \text{ kg}$

ומצאו את רגע הניתוק.

- ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?



(4) **משטח על דיסקה מחובר לקפיץ**
 נתונה מערכת כבשרטוט (אין החלקה במערכת).
 מהי התדירות?



(5) **תנודה בתעלה בכדור"א**
 בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט.
 מסת כדור הארץ M.
 מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

(6) **שתי מסות מחוברות בקפיץ****
 שתי מסות m_1 ו- m_2 מחוברות בקפיץ בעל קבוע k ואורך רפוי l .
 המסות נמצאות במנוחה על מישור אופקי חלק.
 נותנים דחיפה ימינה למסה m_1 המקנה לה מהירות התחלתית v_0 .
 א. מהי תדירות התנודות של התנועה (כתלות בנתוני הבעיה)?
 רמז: על מנת לפתור את המשוואות יש להחליף משתנים
 ל-

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad x_{rel} = x_1 - x_2$$

ב. מצאו את מיקום המסה m_2 כתלות בזמן.

תשובות סופיות:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} Kx^2 - mgx + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \text{ב.} \quad \sqrt{\frac{2kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_k g}{d}} \quad (2)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \quad \text{ב.} \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = -2\Delta y_{\min} \omega \sin(\omega t), \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{ג.}$$

$$\ddot{x} = - \left(\frac{K}{m + 2M} \right) x \quad (4)$$

$$\ddot{x} = - \left(\frac{M}{R^3} \right) (x - 0) \quad (5)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

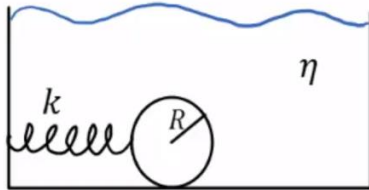
$$, A = \frac{\sqrt{v_0^2 + l^2 \omega^2}}{\omega}, x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m} (l + v_0 t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{ב.}$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega l}$$

תנועה הרמונית מרוסנת:

שאלות:

(1) כדור במיכל מים



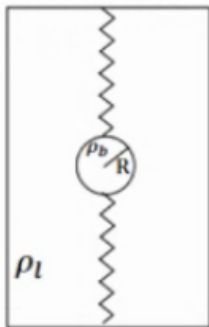
כדור בעל מסה m ורדיוס R נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל. קבוע הקפיץ הוא k . בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו

הוא: $\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר η היא צמיגות המים ו- R הוא רדיוס הכדור.

התייחס ל- k, m, η, R כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור

בהנחה ש- $R < \frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

(2) שני קפיצים בנוזל



כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.

נתון: R - רדיוס הכדור, ρ_b - צפיפות המסה של הכדור,

ρ_l - צפיפות המסה של המים, K - קבוע שני הקפיצים ו- η - צמיגות המים.

(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו

כוח ציפה: $F = \rho_l V g$ וכוח סטוקס: $F = -6\pi\eta R v$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.

ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?

מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.

ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

(3) איבוד אנרגיה במחזור

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.

בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

(4) משקולת במיכל מים תלויה מהתקרה

משקולת שמסתה: $M = 1\text{kg}$ נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקרה באמצעות קפיץ בעל קבוע: $k = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. כוח ההתנגדות שמפעילים המים הוא מהצורה של: $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ כאשר: $\lambda = 4 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$ ו- $\vec{v}$ היא מהירות המסה. הניחו שהמשקולת אינה יוצאת מהמים ואינה פוגעת ברצפה.

א. תוך כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתי? (הניחו שהפאזה היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזורים זה יקרה?

(5) מסה באמבט מים ודבש

מסה: $m = 1\text{kg}$ נמצאת באמבט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני קפיצים זהים בעלי קבוע: $k = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ לשתי דפנות האמבט ונעה ללא חיכוך עם ריצפת האמבט. מזיזים את המסה 0.5m מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גרר: $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ כאשר: $\lambda = 10 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$.

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בדבש מה שמגדיל את λ פי $\sqrt{2}$. מזיזים שוב את המסה 0.5m ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{3\pi R \eta}{m}\right)^2} \quad (1)$$

$$y_{eq} = \frac{F_b}{2K} \quad (2) \quad \text{א.} \quad \omega^* = \sqrt{\frac{2K}{m} - \left(\frac{6\pi\eta R}{2m}\right)^2} \quad \text{ב.} \quad \frac{2K}{m} = \frac{6\pi\eta R^2}{2m} \quad \text{ג.}$$

$$5\% \quad (3)$$

$$1.6\text{sec} \quad \text{א.} \quad \text{ב. בערך מחזור אחד.} \quad (4)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} t e^{-5\sqrt{2}t} \quad \text{ב.} \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-5t} \cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{א.} \quad (5)$$